

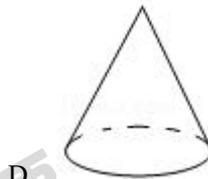
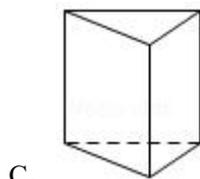
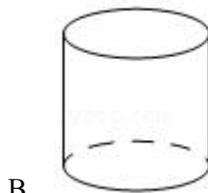
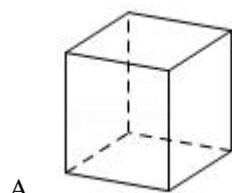
2019 年湖南省湘潭市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题有且只有一个正确答案，请将正确答案的选项代号涂在答题卡相应的位置上，每小题 3 分，满分 24 分）

1. (3 分) 下列各数中是负数的是 ()

- A. $|-3|$ B. -3 C. $-(-3)$ D. $\frac{1}{3}$

2. (3 分) 下列立体图形中，俯视图是三角形的是 ()



3. (3 分) 今年湘潭市参加初中学业水平考试的九年级学生人数约 24000 人，24000 用科学记数法表示为 ()

- A. 0.24×10^5 B. 2.4×10^4 C. 2.4×10^3 D. 24×10^3

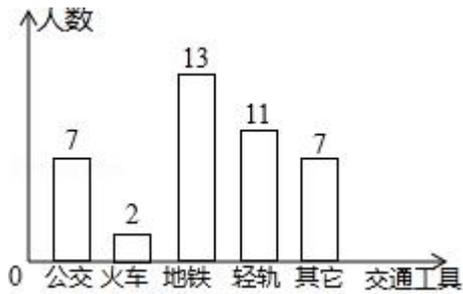
4. (3 分) 下列计算正确的是 ()

- A. $a^6 \div a^3 = a^2$ B. $(a^2)^3 = a^5$ C. $2a + 3a = 6a$ D. $2a \cdot 3a = 6a^2$

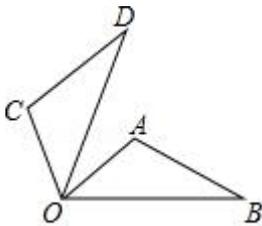
5. (3 分) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + c = 0$ 有两个相等的实数根，则 $c =$ ()

- A. 4 B. 2 C. 1 D. -4

6. (3 分) 随着长株潭一体化进程不断推进，湘潭在交通方面越来越让人期待。将要实施的“两干一轨”项目中的“一轨”，是将长沙市地铁 3 号线南延至湘潭北站，往返长潭两地又将多“地铁”这一选择。为了解人们选择交通工具的意愿，随机抽取了部分市民进行调查，并根据调查结果绘制如下统计图，关于交通工具选择的人数数据，以下结论正确的是 ()



- A. 平均数是 8 B. 众数是 11 C. 中位数是 2 D. 极差是 10
7. (3分) 如图, 将 $\triangle OAB$ 绕点 O 逆时针旋转 70° 到 $\triangle OCD$ 的位置, 若 $\angle AOB=40^\circ$, 则 $\angle AOD=$ ()



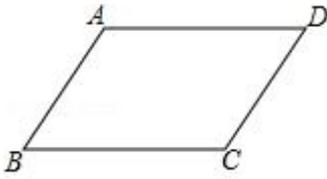
- A. 45° B. 40° C. 35° D. 30°
8. (3分) 现代互联网技术的广泛应用, 催生了快递行业的高速发展. 据调查, 湘潭某家小型快递公司的分拣工小李和小江, 在分拣同一类物件时, 小李分拣 120 个物件所用的时间与江分拣 90 个物件所用的时间相同, 已知小李每小时比小江多分拣 20 个物件. 若设小江每小时分拣 x 个物件, 则可列方程为 ()

- A. $\frac{120}{x-20} = \frac{90}{x}$ B. $\frac{120}{x+20} = \frac{90}{x}$
- C. $\frac{120}{x} = \frac{90}{x-20}$ D. $\frac{120}{x} = \frac{90}{x+20}$

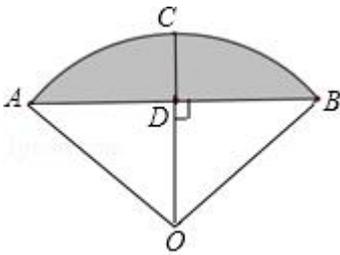
二、填空题 (本大题共 8 小题, 请将答案写在答题卡相应的位置上, 每小题 3 分, 满分 24 分)

9. (3分) 函数 $y = \frac{1}{x-6}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.
10. (3分) 若 $a+b=5$, $a-b=3$, 则 $a^2-b^2=$ _____.
11. (3分) 为庆祝新中国成立 70 周年, 某校开展以“我和我亲爱的祖国”为主题的“快闪”活动, 七年级准备从两名男生和三名女生中选出一名同学领唱, 如果每一位同学被选中的机会均等, 则选出的恰为女生的概率是_____.
12. (3分) 计算: $(\frac{1}{4})^{-1} =$ _____.
13. (3分) 将一次函数 $y=3x$ 的图象向上平移 2 个单位, 所得图象的函数表达式为_____.
14. (3分) 四边形的内角和是_____.

15. (3分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 若 $AB=CD$, 则添加一个条件_____, 能得到平行四边形 $ABCD$. (不添加辅助线, 任意添加一个符合题意的条件即可)

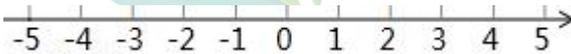


16. (3分) 《九章算术》是我国古代数学成就的杰出代表作, 其中《方田》章计算弧田面积所用的经验公式是: 弧田面积 $= \frac{1}{2} (\text{弦} \times \text{矢} + \text{矢}^2)$. 孤田是由圆弧和其所对的弦围成 (如图中的阴影部分), 公式中“弦”指圆弧所对弦长, “矢”等于半径长与圆心到弦的距离之差, 运用垂径定理 (当半径 $OC \perp$ 弦 AB 时, OC 平分 AB) 可以求解. 现已知弦 $AB=8$ 米, 半径等于 5 米的弧田, 按照上述公式计算出弧田的面积为_____平方米.



- 三、解答题 (本大题共 10 小题, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤请将解答过程写在答题卡相应位置上, 满分 72 分)

17. (6分) 解不等式组 $\begin{cases} 2x \leq 6 \\ \frac{3x+1}{2} > x \end{cases}$, 并把它的解集在数轴上表示出来.



18. (6分) 阅读材料: 运用公式法分解因式, 除了常用的平方差公式和完全平方公式以外, 还可以应用其他公式, 如立方和与立方差公式, 其公式如下:

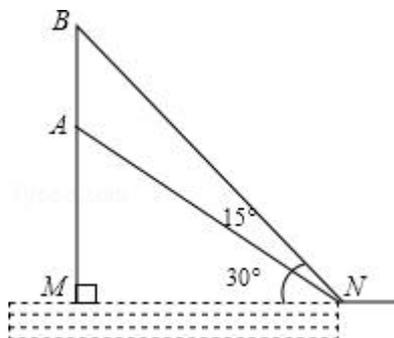
$$\text{立方和公式: } x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$\text{立方差公式: } x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

根据材料和已学知识, 先化简, 再求值: $\frac{3x}{x^2 - 2x} - \frac{x^2 + 2x + 4}{x^3 - 8}$, 其中 $x=3$.

19. (6分) 我国于 2019 年 6 月 5 日首次完成运载火箭海上发射, 这标志着我国火箭发射技术达到了一个崭新的高度. 如图, 运载火箭从海面发射站点 M 处垂直海面发射, 当火箭到达点 A 处时, 海岸边 N 处的雷达站测得点 N 到点 A 的距离为 8 千米, 仰角为 30° . 火

火箭继续直线上升到达点 B 处，此时海岸边 N 处的雷达测得 B 处的仰角增加 15° ，求此时火箭所在点 B 处与发射站点 M 处的距离。（结果精确到 0.1 千米）（参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ）



20. (6分) 每年5月份是心理健康宣传月，某中学开展以“关心他人，关爱自己”为主题的心理健康系列活动. 为了解师生的心理健康状况，对全体2000名师生进行了心理测评，随机抽取20名师生的测评分数进行了以下数据的整理与分析：

①数据收集：抽取的20名师生测评分数如下

85, 82, 94, 72, 78, 89, 96, 98, 84, 65,

73, 54, 83, 76, 70, 85, 83, 63, 92, 90.

②数据整理：将收集的数据进行分组并评价等第：

| 分数 x | $90 \leq x < 100$ | $80 \leq x < 90$ | $70 \leq x < 80$ | $60 \leq x < 70$ | $x < 60$ |
|--------|-------------------|------------------|------------------|------------------|----------|
| 人数 | 5 | a | 5 | 2 | 1 |
| 等第 | A | B | C | D | E |

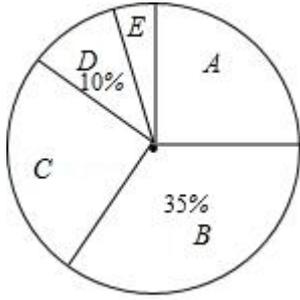
③数据分析：绘制成不完整的扇形统计图：

④依据统计信息回答问题

(1) 统计表中的 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

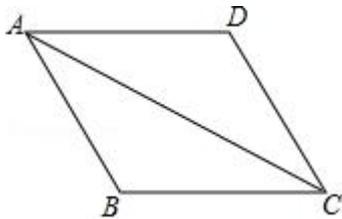
(2) 心理测评等第 C 等的师生人数所占扇形的圆心角度数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 学校决定对 E 等的师生进行团队心理辅导，请你根据数据分析结果，估计有多少师生需要参加团队心理辅导？



21. (6分) 如图, 将 $\triangle ABC$ 沿着 AC 边翻折, 得到 $\triangle ADC$, 且 $AB \parallel CD$.

- (1) 判断四边形 $ABCD$ 的形状, 并说明理由;
- (2) 若 $AC=16$, $BC=10$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.



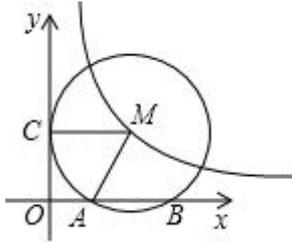
22. (6分) 2018年高一新生开始, 湖南全面启动高考综合改革, 实行“3+1+2”的高考选考方案. “3”是指语文、数学、外语三科必考; “1”是指从物理、历史两科中任选一科参加选考, “2”是指从政治、化学、地理、生物四科中任选两科参加选考

(1) “1+2”的选考方案共有多少种? 请直接写出所有可能的选法; (选法与顺序无关, 例如: “物、政、化”与“物、化、政”属于同一种选法)

(2) 高一学生小明和小杰将参加新高考, 他们酷爱历史和生物, 两人约定必选历史和生物. 他们还需要从政治、化学、地理三科中选一科参考, 若这三科被选中的机会均等, 请用列表或画树状图的方法, 求出他们恰好都选中政治的概率.

23. (8分) 如图, 在平面直角坐标系中, $\odot M$ 与 x 轴的正半轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴的正半轴相切于点 C , 连接 MA 、 MC , 已知 $\odot M$ 半径为2, $\angle AMC=60^\circ$, 双曲线 $y=\frac{k}{x}$ ($x > 0$) 经过圆心 M .

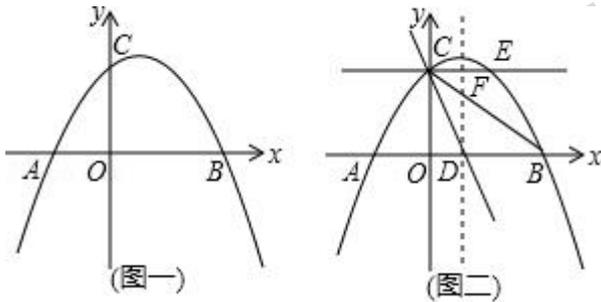
- (1) 求双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 的解析式;
- (2) 求直线 BC 的解析式.



24. (8分) 湘潭政府工作报告中强调, 2019年着重推进乡村振兴战略, 做优做响湘莲等特色农产品品牌. 小亮调查了一家湘潭特产店 A 、 B 两种湘莲礼盒一个月的销售情况, A 种湘莲礼盒进价 72 元/盒, 售价 120 元/盒, B 种湘莲礼盒进价 40 元/盒, 售价 80 元/盒, 这两种湘莲礼盒这个月平均每天的销售总额为 2800 元, 平均每天的总利润为 1280 元.

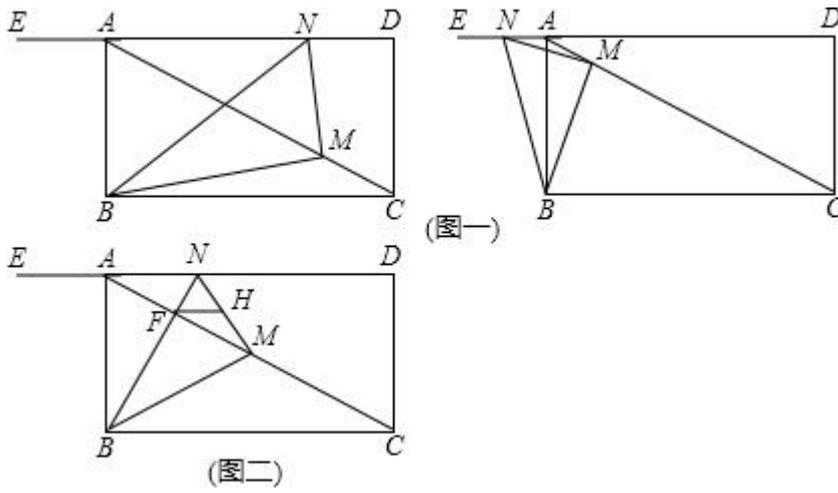
- (1) 求该店平均每天销售这两种湘莲礼盒各多少盒?
- (2) 小亮调查发现, A 种湘莲礼盒售价每降 3 元可多卖 1 盒. 若 B 种湘莲礼盒的售价和销量不变, 当 A 种湘莲礼盒降价多少元/盒时, 这两种湘莲礼盒平均每天的总利润最大, 最大是多少元?

25. (10分) 如图一, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, \sqrt{3})$ 三点



- (1) 求该抛物线的解析式;
- (2) $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(4, y_2)$ 两点均在该抛物线上, 若 $y_1 \leq y_2$, 求 P 点横坐标 x_1 的取值范围;
- (3) 如图二, 过点 C 作 x 轴的平行线交抛物线于点 E , 该抛物线的对称轴与 x 轴交于点 D , 连结 CD 、 CB , 点 F 为线段 CB 的中点, 点 M 、 N 分别为直线 CD 和 CE 上的动点, 求 $\triangle FMN$ 周长的最小值.

26. (10分) 如图一, 在射线 DE 的一侧以 AD 为一条边作矩形 $ABCD$, $AD=5\sqrt{3}$, $CD=5$, 点 M 是线段 AC 上一动点 (不与点 A 重合), 连结 BM , 过点 M 作 BM 的垂线交射线 DE 于点 N , 连接 BN .



- (1) 求 $\angle CAD$ 的大小;
- (2) 问题探究: 动点 M 在运动的过程中,
 - ① 是否能使 $\triangle AMN$ 为等腰三角形, 如果能, 求出线段 MC 的长度; 如果不能, 请说明理由.
 - ② $\angle MBN$ 的大小是否改变? 若不改变, 请求出 $\angle MBN$ 的大小; 若改变, 请说明理由.
- (3) 问题解决:

如图二, 当动点 M 运动到 AC 的中点时, AM 与 BN 的交点为 F , MN 的中点为 H , 求线段 FH 的长度.



2019 年湖南省湘潭市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题有且只有一个正确答案，请将正确答案的选项代号涂在答题卡相应的位置上，每小题 3 分，满分 24 分）

1.（3 分）下列各数中是负数的是（ ）

- A. $|-3|$ B. -3 C. $-(-3)$ D. $\frac{1}{3}$

【解答】解： -3 的绝对值 $=3 > 0$ ；

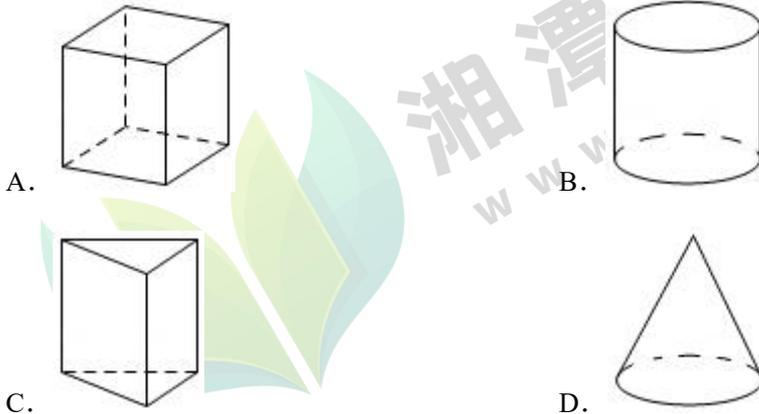
$-3 < 0$ ；

$-(-3) = 3 > 0$ ；

$\frac{1}{3} > 0$.

故选：B.

2.（3 分）下列立体图形中，俯视图是三角形的是（ ）



【解答】解：A、立方体的俯视图是正方形，故此选项错误；

B、圆柱体的俯视图是圆，故此选项错误；

C、三棱柱的俯视图是三角形，故此选项正确；

D、圆锥体的俯视图是圆，故此选项错误；

故选：C.

3.（3 分）今年湘潭市参加初中学业水平考试的九年级学生人数约 24000 人，24000 用科学记数法表示为（ ）

- A. 0.24×10^5 B. 2.4×10^4 C. 2.4×10^3 D. 24×10^3

【解答】解：将 24000 用科学记数法表示为： 2.4×10^4 ，

故选：B.

4. (3分) 下列计算正确的是 ()

- A. $a^6 \div a^3 = a^2$ B. $(a^2)^3 = a^5$ C. $2a+3a=6a$ D. $2a \cdot 3a=6a^2$

【解答】解：A、结果是 a^3 ，故本选项不符合题意；

B、结果是 a^6 ，故本选项不符合题意；

C、结果是 $5a$ ，故本选项不符合题意；

D、结果是 $6a^2$ ，故本选项符合题意；

故选：D.

5. (3分) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + c = 0$ 有两个相等的实数根，则 $c =$ ()

- A. 4 B. 2 C. 1 D. -4

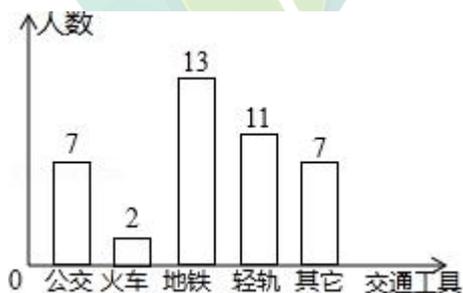
【解答】解： \because 方程 $x^2 - 4x + c = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times c = 16 - 4c = 0,$$

解得： $c = 4$.

故选：A.

6. (3分) 随着长株潭一体化进程不断推进，湘潭在交通方面越来越让人期待。将要实施的“两干一轨”项目中的“一轨”，是将长沙市地铁3号线南延至湘潭北站，往返长潭两地又将多“地铁”这一选择。为了解人们选择交通工具的意愿，随机抽取了部分市民进行调查，并根据调查结果绘制如下统计图，关于交通工具选择的人数数据，以下结论正确的是 ()



- A. 平均数是 8 B. 众数是 11 C. 中位数是 2 D. 极差是 10

【解答】解： $(7+2+13+11+7) \div 5 = 8$ ，即平均数是 8，故 A 事正确的。

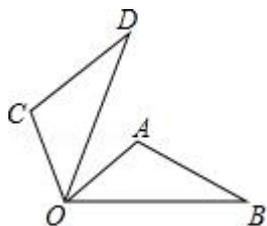
出现次数最多的是 7，即众数是 7，故 B 不正确，

从小到大排列，第 3 个数都是 7，即中位数是 7，故 C 是不正确的；

极差为 $13 - 2 = 11$ ，故 D 不正确；

故选：A.

7. (3分) 如图, 将 $\triangle OAB$ 绕点 O 逆时针旋转 70° 到 $\triangle OCD$ 的位置, 若 $\angle AOB=40^\circ$, 则 $\angle AOD=$ ()



- A. 45° B. 40° C. 35° D. 30°

【解答】解: $\because \triangle OAB$ 绕点 O 逆时针旋转 70° 到 $\triangle OCD$ 的位置,
 $\therefore \angle BOD=70^\circ$,
 而 $\angle AOB=40^\circ$,
 $\therefore \angle AOD=70^\circ - 40^\circ =30^\circ$.

故选: D .

8. (3分) 现代互联网技术的广泛应用, 催生了快递行业的高速发展. 据调查, 湘潭某家小型快递公司的分拣工小李和小江, 在分拣同一类物件时, 小李分拣 120 个物件所用的时间与江小江分拣 90 个物件所用的时间相同, 已知小李每小时比小江多分拣 20 个物件. 若设小江每小时分拣 x 个物件, 则可列方程为 () .

- A. $\frac{120}{x-20}=\frac{90}{x}$ B. $\frac{120}{x+20}=\frac{90}{x}$
 C. $\frac{120}{x}=\frac{90}{x-20}$ D. $\frac{120}{x}=\frac{90}{x+20}$

【解答】解: 由题意可得,

$$\frac{120}{x+20}=\frac{90}{x}$$

故选: B .

二、填空题 (本大题共 8 小题, 请将答案写在答题卡相应的位置上, 每小题 3 分, 满分 24 分)

9. (3分) 函数 $y=\frac{1}{x-6}$ 中, 自变量 x 的取值范围是 $x \neq 6$.

【解答】解: 由题意得, $x-6 \neq 0$,

解得 $x \neq 6$.

故答案为: $x \neq 6$.

10. (3分) 若 $a+b=5$, $a-b=3$, 则 $a^2-b^2=$ 15 .

【解答】解：∵ $a+b=5$ ， $a-b=3$ ，

$$\therefore a^2 - b^2$$

$$= (a+b)(a-b)$$

$$= 5 \times 3$$

$$= 15,$$

故答案为：15.

11. (3分) 为庆祝新中国成立70周年，某校开展以“我和我亲爱的祖国”为主题的“快闪”活动，七年级准备从两名男生和三名女生中选出一名同学领唱，如果每一位同学被选中的机会均等，则选出的恰为女生的概率是 $\frac{3}{5}$.

【解答】解：选出的恰为女生的概率为 $\frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$,

故答案为 $\frac{3}{5}$.

12. (3分) 计算： $(\frac{1}{4})^{-1} = 4$.

【解答】解： $(\frac{1}{4})^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$,

故答案为：4.

13. (3分) 将一次函数 $y=3x$ 的图象向上平移2个单位，所得图象的函数表达式为 $y=3x+2$.

【解答】解：将正比例函数 $y=3x$ 的图象向上平移2个单位后所得函数的解析式为 $y=3x+2$,

故答案为： $y=3x+2$.

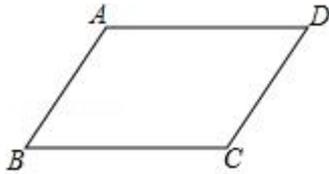
14. (3分) 四边形的内角和是 360° .

【解答】解： $(4-2) \times 180^\circ = 360^\circ$.

故四边形的内角和为 360° .

故答案为： 360° .

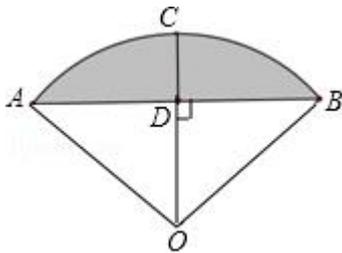
15. (3分) 如图，在四边形 $ABCD$ 中，若 $AB=CD$ ，则添加一个条件 $AD=BC$ ，能得到平行四边形 $ABCD$. (不添加辅助线，任意添加一个符合题意的条件即可)



【解答】解：根据平行四边形的判定，可再添加一个条件： $AD=BC$ 。

故答案为： $AD=BC$ （答案不唯一）。

16. (3分)《九章算术》是我国古代数学成就的杰出代表作，其中《方田》章计算弧田面积所用的经验公式是：弧田面积 $=\frac{1}{2}$ (弦 \times 矢+矢 2)。孤田是由圆弧和其所对的弦围成(如图中的阴影部分)，公式中“弦”指圆弧所对弦长，“矢”等于半径长与圆心到弦的距离之差，运用垂径定理(当半径 $OC\perp$ 弦 AB 时， OC 平分 AB)可以求解。现已知弦 $AB=8$ 米，半径等于5米的弧田，按照上述公式计算出弧田的面积为10平方米。



【解答】解： \because 弦 $AB=8$ 米，半径 $OC\perp$ 弦 AB ，

$$\therefore AD=4,$$

$$\therefore OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=3,$$

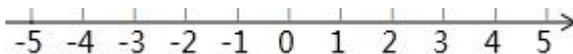
$$\therefore OA-OD=2,$$

$$\therefore \text{弧田面积}=\frac{1}{2}(\text{弦}\times\text{矢}+\text{矢}^2)=\frac{1}{2}\times(8\times 2+2^2)=10,$$

故答案为：10。

三、解答题(本大题共10小题，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤请将解答过程写在答题卡相应位置上，满分72分)

17. (6分)解不等式组 $\begin{cases} 2x\leq 6 \\ \frac{3x+1}{2}>x \end{cases}$ ，并把它解集在数轴上表示出来。



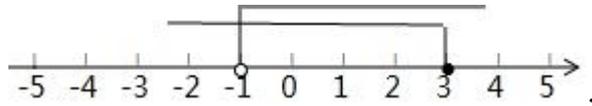
【解答】解： $\begin{cases} 2x\leq 6 \text{ ①} \\ \frac{3x+1}{2}>x \text{ ②} \end{cases}$

解不等式①得, $x \leq 3$,

解不等式②, $x > -1$,

所以, 原不等式组的解集为 $-1 < x \leq 3$,

在数轴上表示如下:



18. (6分) 阅读材料: 运用公式法分解因式, 除了常用的平方差公式和完全平方公式以外, 还可以应用其他公式, 如立方和与立方差公式, 其公式如下:

立方和公式: $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

立方差公式: $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

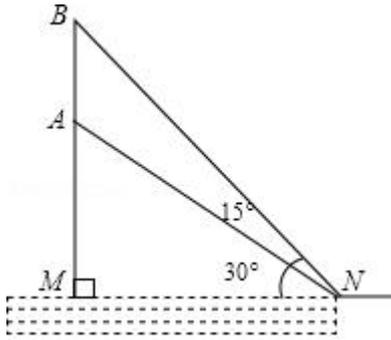
根据材料和已学知识, 先化简, 再求值: $\frac{3x}{x^2 - 2x} - \frac{x^2 + 2x + 4}{x^3 - 8}$, 其中 $x = 3$.

【解答】解: $\frac{3x}{x^2 - 2x} - \frac{x^2 + 2x + 4}{x^3 - 8}$

$$= \frac{3x}{x(x-2)} - \frac{x^2 + 2x + 4}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}$$
$$= \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-2}$$
$$= \frac{2}{x-2}$$

当 $x = 3$ 时, 原式 = $\frac{2}{3-2} = 2$.

19. (6分) 我国于 2019 年 6 月 5 日首次完成运载火箭海上发射, 这标志着我国火箭发射技术达到了一个崭新的高度. 如图, 运载火箭从海面发射站点 M 处垂直海面发射, 当火箭到达点 A 处时, 海岸边 N 处的雷达站测得点 N 到点 A 的距离为 8 千米, 仰角为 30° . 火箭继续直线上升到达点 B 处, 此时海岸边 N 处的雷达测得 B 处的仰角增加 15° , 求此时火箭所在点 B 处与发射站点 M 处的距离. (结果精确到 0.1 千米)(参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$)

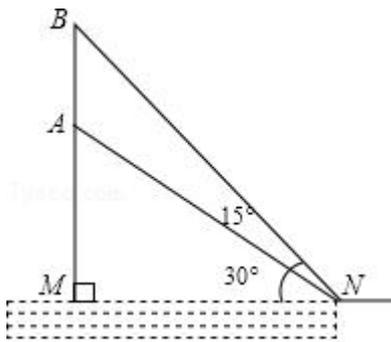


【解答】解：如图所示：连接 MN ，由题意可得： $\angle AMN=90^\circ$ ， $\angle ANM=30^\circ$ ， $\angle BNM=45^\circ$ ， $AN=8\text{km}$ ，

在直角 $\triangle AMN$ 中， $MN=AN \cdot \cos 30^\circ = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (km)}$ 。

在直角 $\triangle BMN$ 中， $BM=MN \cdot \tan 45^\circ = 4\sqrt{3}\text{km} \approx 6.9\text{km}$ 。

答：此时火箭所在点 B 处与发射站点 M 处的距离约为 6.9km 。



20. (6分) 每年5月份是心理健康宣传月，某中学开展以“关心他人，关爱自己”为主题的心理健康系列活动。为了解师生的心理健康状况，对全体2000名师生进行了心理测评，随机抽取20名师生的测评分数进行了以下数据的整理与分析：

①数据收集：抽取的20名师生测评分数如下

85, 82, 94, 72, 78, 89, 96, 98, 84, 65,

73, 54, 83, 76, 70, 85, 83, 63, 92, 90.

②数据整理：将收集的数据进行分组并评价等第：

| 分数 x | $90 \leq x < 100$ | $80 \leq x < 90$ | $70 \leq x < 80$ | $60 \leq x < 70$ | $x < 60$ |
|--------|-------------------|------------------|------------------|------------------|----------|
| 人数 | 5 | a | 5 | 2 | 1 |
| 等第 | A | B | C | D | E |

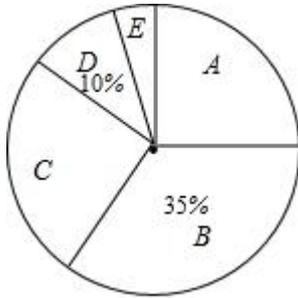
③数据分析：绘制成不完整的扇形统计图：

④依据统计信息回答问题

(1) 统计表中的 $a = \underline{7}$.

(2) 心理测评等第 C 等的师生人数所占扇形的圆心角度数为 $\underline{90^\circ}$.

(3) 学校决定对 E 等的师生进行团队心理辅导, 请你根据数据分析结果, 估计有多少师生需要参加团队心理辅导?



【解答】解: (1) 总人数 $= 2 \div 10\% = 20$ (人), $a = 20 \times 35\% = 7$,
故答案为 7.

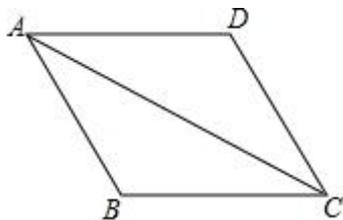
(2) C 所占的圆心角 $= 360^\circ \times \frac{5}{20} = 90^\circ$,
故答案为 90° .

(3) $2000 \times \frac{1}{20} = 100$ (人),
答: 估计有 100 名师生需要参加团队心理辅导.

21. (6 分) 如图, 将 $\triangle ABC$ 沿着 AC 边翻折, 得到 $\triangle ADC$, 且 $AB \parallel CD$.

(1) 判断四边形 $ABCD$ 的形状, 并说明理由;

(2) 若 $AC = 16$, $BC = 10$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.



【解答】解: (1) 四边形 $ABCD$ 是菱形; 理由如下:

$\because \triangle ABC$ 沿着 AC 边翻折, 得到 $\triangle ADC$,

$\therefore AB = AD, BC = CD, \angle BAC = \angle DAC, \angle BCA = \angle DCA$,

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle BAC = \angle DAC$,

$$\therefore \angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \angle DCA,$$

$$\therefore AD \parallel BC, AB = AD = BC = CD,$$

\therefore 四边形 $ABCD$ 是菱形;

(2) 连接 BD 交 AC 于 O , 如图所示:

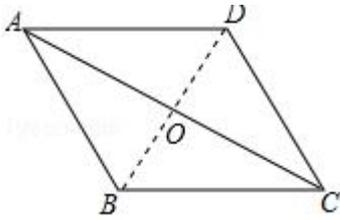
\because 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD, OA = OC = \frac{1}{2}AC = 8, OB = OD,$$

$$\therefore OB = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6,$$

$$\therefore BD = 2OB = 12,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 的面积} = \frac{1}{2}AC \times BD = \frac{1}{2} \times 16 \times 12 = 96.$$



22. (6分) 2018年高一新生开始, 湖南全面启动高考综合改革, 实行“3+1+2”的高考选考方案. “3”是指语文、数学、外语三科必考; “1”是指从物理、历史两科中任选一科参加选考, “2”是指从政治、化学、地理、生物四科中任选两科参加选考

(1) “1+2”的选考方案共有多少种? 请直接写出所有可能的选法; (选法与顺序无关, 例如: “物、政、化”与“物、化、政”属于同一种选法)

(2) 高一学生小明和小杰将参加新高考, 他们酷爱历史和生物, 两人约定必选历史和生物. 他们还需要从政治、化学、地理三科中选一科参考, 若这三科被选中的机会均等, 请用列表或画树状图的方法, 求出他们恰好都选中政治的概率.

【解答】解: (1) 画树状图如下,



由树状图知, 共有 12 种等可能结果;

(2) 画树状图如下



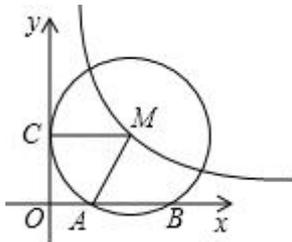
由树状图知，共有 9 种等可能结果，其中他们恰好都选中政治的只有 1 种结果，

所以他们恰好都选中政治的概率为 $\frac{1}{9}$.

23. (8 分) 如图，在平面直角坐标系中， $\odot M$ 与 x 轴的正半轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴的正半轴相切于点 C ，连接 MA 、 MC ，已知 $\odot M$ 半径为 2， $\angle AMC = 60^\circ$ ，双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 经过圆心 M .

(1) 求双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 的解析式；

(2) 求直线 BC 的解析式.



【解答】解：(1) 如图，过点 M 作 $MN \perp x$ 轴于 N ，

$$\therefore \angle MNO = 90^\circ,$$

$\because \odot M$ 切 y 轴于 C ，

$$\therefore \angle OCM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CON = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CON = \angle OCM = \angle ONM = 90^\circ,$$

\therefore 四边形 $OCMN$ 是矩形，

$$\therefore AM = CM = 2, \angle CMN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AMC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AMN = 30^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ANM \text{ 中, } MN = AM \cdot \cos \angle AMN = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore M(2, \sqrt{3}),$$

\because 双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 经过圆心 M ，

$$\therefore k = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

\therefore 双曲线的解析式为 $y = \frac{2\sqrt{3}}{x} (x > 0)$;

(2) 如图, 过点 B, C 作直线,

由 (1) 知, 四边形 $OCMN$ 是矩形,

$\therefore CM = ON = 2, OC = MN = \sqrt{3},$

$\therefore C(0, \sqrt{3}),$

在 $Rt\triangle ANM$ 中, $\angle AMN = 30^\circ, AM = 2,$

$\therefore AN = 1,$

$\therefore MN \perp AB,$

$\therefore BN = AN = 1, OB = ON + BN = 3,$

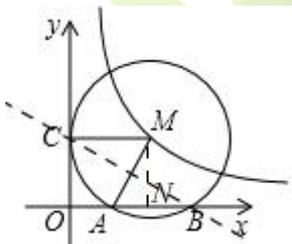
$\therefore B(3, 0),$

设直线 BC 的解析式为 $y = k'x + b,$

$$\therefore \begin{cases} 3k' + b = 0 \\ b = \sqrt{3} \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k' = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases},$$

\therefore 直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}.$



24. (8分) 湘潭政府工作报告中强调, 2019年着重推进乡村振兴战略, 做优做响湘莲等特色农产品品牌. 小亮调查了一家湘潭特产店 A, B 两种湘莲礼盒一个月的销售情况, A 种湘莲礼盒进价 72 元/盒, 售价 120 元/盒, B 种湘莲礼盒进价 40 元/盒, 售价 80 元/盒, 这两种湘莲礼盒这个月平均每天的销售总额为 2800 元, 平均每天的总利润为 1280 元.

(1) 求该店平均每天销售这两种湘莲礼盒各多少盒?

(2) 小亮调查发现, A 种湘莲礼盒售价每降 3 元可多卖 1 盒. 若 B 种湘莲礼盒的售价和销量不变, 当 A 种湘莲礼盒降价多少元/盒时, 这两种湘莲礼盒平均每天的总利润最大, 最大是多少元?

【解答】解: (1) 根据题意, 可设平均每天销售 A 礼盒 x 盒, B 种礼盒为 y 盒,

$$\text{则有} \begin{cases} (120-72)x+(80-40)y=1280 \\ 120x+80y=2800 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x=10 \\ y=20 \end{cases}$$

故该店平均每天销售 A 礼盒 10 盒, B 种礼盒为 20 盒.

(2) 设 A 种湘莲礼盒降价 m 元/盒, 利润为 W 元, 依题意

$$\text{总利润 } W = (120 - m - 72) \left(10 + \frac{m}{3}\right) + 800$$

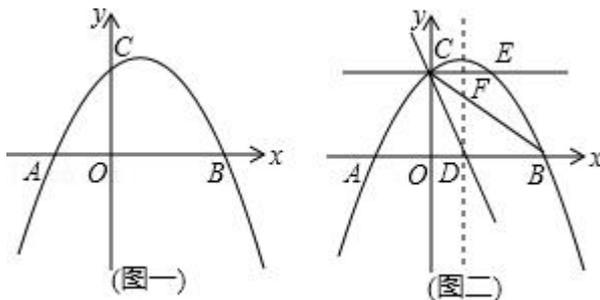
$$\text{化简得 } W = -\frac{1}{3}m^2 + 6m + 1280 = -\frac{1}{3}(m - 9)^2 + 1307$$

$$\because a = -\frac{1}{3} < 0$$

\therefore 当 $m=9$ 时, 取得最大值为 1307,

故当 A 种湘莲礼盒降价 9 元/盒时, 这两种湘莲礼盒平均每天的总利润最大, 最大是 1307 元.

25. (10 分) 如图一, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, \sqrt{3})$ 三点



(1) 求该抛物线的解析式;

(2) $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(4, y_2)$ 两点均在该抛物线上, 若 $y_1 \leq y_2$, 求 P 点横坐标 x_1 的取值范围;

(3) 如图二, 过点 C 作 x 轴的平行线交抛物线于点 E , 该抛物线的对称轴与 x 轴交于点 D , 连结 CD 、 CB , 点 F 为线段 CB 的中点, 点 M 、 N 分别为直线 CD 和 CE 上的动点, 求 $\triangle FMN$ 周长的最小值.

【解答】 解: (1) \because 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, \sqrt{3})$ 三点

$$\therefore \begin{cases} a-b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \\ c=\sqrt{3} \end{cases} \text{解得: } a = \frac{\sqrt{3}}{3}, b = \frac{2\sqrt{3}}{3}, c = \sqrt{3};$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}.$$

(2) 抛物线的对称轴为 $x=1$, 抛物线上与 $Q(4, y_2)$ 相对称的点 $Q'(-2, y_2)$

$P(x_1, y_1)$ 在该抛物线上, $y_1 \leq y_2$, 根据抛物线的增减性得:

$$\therefore x_1 \leq -2 \text{ 或 } x_1 \geq 4$$

答: P 点横坐标 x_1 的取值范围: $x_1 \leq -2$ 或 $x_1 \geq 4$.

$$(3) \because C(0, \sqrt{3}), B(3, 0), D(1, 0)$$

$$\therefore OC = \sqrt{3}, OB = 3, OD = 1$$

$\because F$ 是 BC 的中点,

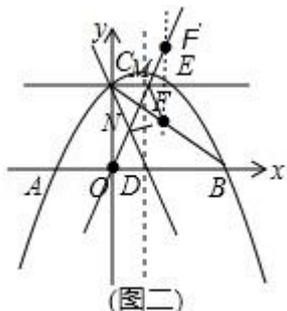
$$\therefore F\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

当点 F 关于直线 CE 的对称点为 F' , 关于直线 CD 的对称点为 F'' , 直线 $F'F''$ 与 CE 、 CD 交点为 M 、 N , 此时 $\triangle FMN$ 的周长最小, 周长为 $F'F''$ 的长, 由对称可得到: F'

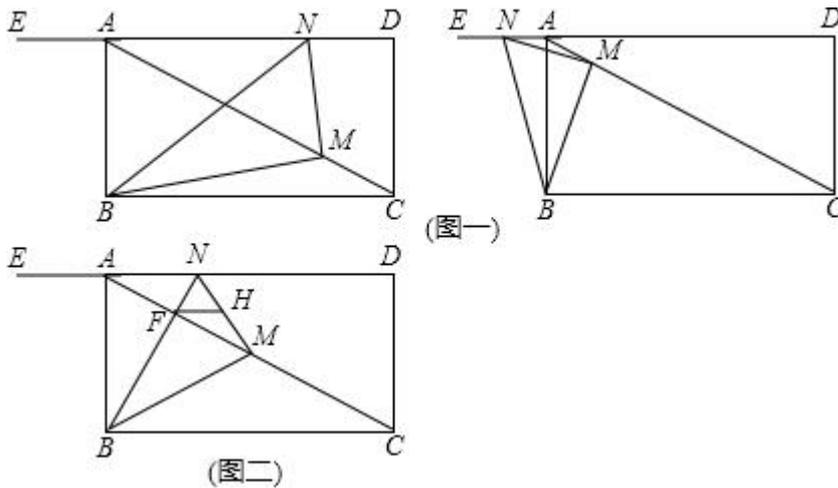
$$\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), F''(0, 0) \text{ 即点 } O,$$

$$F'F'' = F'O = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3,$$

即: $\triangle FMN$ 的周长最小值为 3,



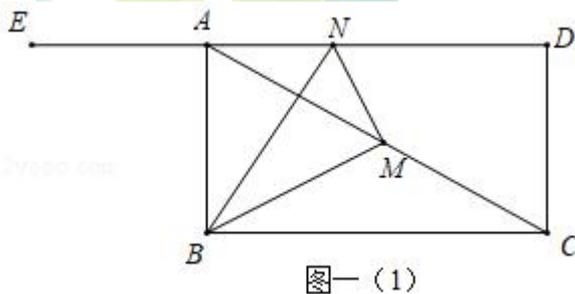
26. (10分) 如图一, 在射线 DE 的一侧以 AD 为一条边作矩形 $ABCD$, $AD = 5\sqrt{3}$, $CD = 5$, 点 M 是线段 AC 上一动点 (不与点 A 重合), 连结 BM , 过点 M 作 BM 的垂线交射线 DE 于点 N , 连接 BN .



- (1) 求 $\angle CAD$ 的大小；
- (2) 问题探究：动点 M 在运动的过程中，
- ① 是否能使 $\triangle AMN$ 为等腰三角形，如果能，求出线段 MC 的长度；如果不能，请说明理由。
- ② $\angle MBN$ 的大小是否改变？若不改变，请求出 $\angle MBN$ 的大小；若改变，请说明理由。
- (3) 问题解决：

如图二，当动点 M 运动到 AC 的中点时， AM 与 BN 的交点为 F ， MN 的中点为 H ，求线段 FH 的长度。

【解答】解：(1) 如图一 (1) 中，



\because 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle ADC = 90^\circ$ ，

$\because \tan \angle DAC = \frac{DC}{AD} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$\therefore \angle DAC = 30^\circ$ 。

- (2) ① 如图一 (1) 中，当 $AN = NM$ 时，
- $\because \angle BAN = \angle BMN = 90^\circ$ ， $BN = BN$ ， $AN = NM$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle BNA \cong \text{Rt}\triangle BNM$ (HL),

$\therefore BA = BM$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\because \angle ACB = \angle DAC = 30^\circ$, $AB = CD = 5$,

$\therefore AC = 2AB = 10$,

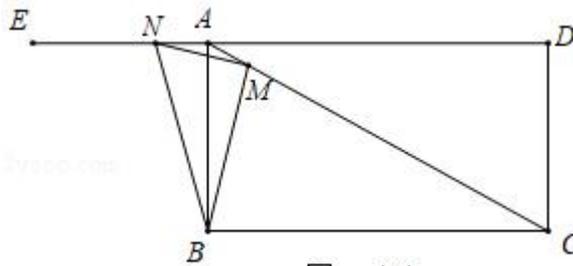
$\because \angle BAM = 60^\circ$, $BA = BM$,

$\therefore \triangle ABM$ 是等边三角形,

$\therefore AM = AB = 5$,

$\therefore CM = AC - AM = 5$.

如图一(2)中, 当 $AN = AM$ 时, 易证 $\angle AMN = \angle ANM = 15^\circ$,



图一(2)

$\because \angle BMN = 90^\circ$,

$\therefore \angle CMB = 75^\circ$, $\because \angle MCB = 30^\circ$,

$\therefore \angle CBM = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ$,

$\therefore \angle CMB = \angle CBM$,

$\therefore CM = CB = 5\sqrt{3}$,

综上所述, 满足条件的 CM 的值为 5 或 $5\sqrt{3}$.

②结论: $\angle MBN = 30^\circ$ 大小不变.

理由: 如图一(1)中, $\because \angle BAN + \angle BMN = 180^\circ$,

$\therefore A, B, M, N$ 四点共圆,

$\therefore \angle MBN = \angle MAN = 30^\circ$.

如图一(2)中, $\because \angle BMN = \angle BAN = 90^\circ$,

$\therefore A, N, B, M$ 四点共圆,

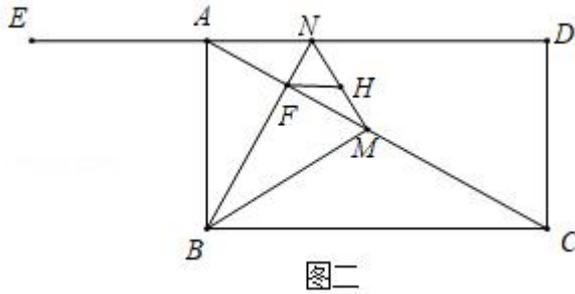
$\therefore \angle MBN + \angle MAN = 180^\circ$,

$$\because \angle DAC + \angle MAN = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle MBN = \angle DAC = 30^\circ,$$

综上所述, $\angle MBN = 30^\circ$.

(3) 如图二中,



$$\because AM = MC,$$

$$\therefore BM = AM = CM,$$

$$\therefore AC = 2AB,$$

$$\therefore AB = BM = AM,$$

$\therefore \triangle ABM$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle BAM = \angle BMA = 60^\circ,$$

$$\because \angle BAN = \angle BMN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NAM = \angle NMA = 30^\circ,$$

$$\therefore NA = NM,$$

$$\because BA = BM,$$

$\therefore BN$ 垂直平分线段 AM ,

$$\therefore FM = \frac{5}{2},$$

$$\therefore NM = \frac{FM}{\cos 30^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{3},$$

$\because \angle NFM = 90^\circ$, $NH = HM$,

$$\therefore FH = \frac{1}{2}MN = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$